



SKRIPSI

**ANALISIS DAN SIMULASI MODEL SITR PADA PENYEBARAN PENYAKIT
TUBERKULOSIS DI KOTA MAKASSAR**

**NUR FAJRI SETIAWAN
1311142005**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATAEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR
2017**



SKRIPSI

**ANALISIS DAN SIMULASI MODEL SITR PADA PENYEBARAN PENYAKIT
TUBERKULOSIS DI KOTA MAKASSAR**

*Diajukan kepada Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri
Makassar untuk memenuhi salah satu syarat memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika*

**NUR FAJRI SETIAWAN
1311142005**

**PROGRAM STUDI MATEMATIKA
JURUSAN MATEMATIKA
FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM
UNIVERSITAS NEGERI MAKASSAR
2017**

PERNYATAAN KEASLIAN

Saya yang bertanda tangan di bawah ini menyatakan bahwa skripsi ini adalah hasil karya sendiri, dan semua sumber baik yang dikutip maupun yang dirujuk telah saya nyatakan dengan benar. Bila dikemudian hari ternyata pernyataan saya terbukti tidak benar, maka saya bersedia menerima sanksi yang telah ditetapkan oleh FMIPA UNM Makassar.

Yang membuat pernyataan,

Nama : Nur Fajri Setiawan
NIM : 1311142005
Tanggal : 25 Juli 2017

PERSETUJUAN PUBLIKASI UNTUK KEPENTINGAN AKADEMIK

Sebagai civitas akademi Universitas Negeri Makassar, saya bertanda tangan di bawah ini :

Nama : Nur Fajri Setiawan

Nim : 1311142005

Program Studi : Matematika

Fakultas : MIPA

demi pengembangan ilmu pengetahuan, saya menyetujui untuk memberikan kepada Universitas Negeri Makassar **Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif** (*Non-Ekslusive Royalti Free Right*) atas skripsi yang berjudul “Analisis dan Simulasi Model SITR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar”, beserta perangkat yang ada (jika diperlukan). Dengan Hak Bebas Royalti Non-Eksklusif, Universitas Negeri Makassar berhak menyimpan mengalih media/ formatkan, mengelola dalam bentuk pangkalan data(*database*), merawat dan mempublikasikan skripsi saya selama tetap mencantumkan nama saya sebagai penulis, pencipta dan pemilik hak cipta serta tidak dikomersilkan.

Demikian pernyataan ini saya buat dengan sebenarnya

Dibuat di : Makassar

Pada Tanggal : 25 Juli 2017

Menyetujui

Pembimbing I

Yang Menyatakan

Prof. Syafruddin Side, S.Si., M.Si., Ph.D

NIP.19720202 199702 1 002

Nur Fajri Setiawan

NIM. 1311142005

MOTTO DAN PERSEMBAHAN

"...niscaya Allah akan meninggikan orang-orang yang beriman di antaramu dan orang-orang yang diberi ilmu pengetahuan beberapa derajat. Dan Allah Maha Mengetahui apa yang kamu kerjakan". (QS. Al-Mujaadilah:11)

"Pendidikan bukan persiapan untuk hidup. Pendidikan adalah hidup itu sendiri".

(John Dewey)

"keberhasilan adalah kemampuan untuk melewati dan mengatasi dari satu kegagalan ke kegagalan berikutnya tanpa kehilangan semangat". (Henry Ward Beecher)

"Kita hanya berfikir ketika kita terbentur suatu masalah". (Plato)

"Semua yang riil bersifat rasional dan semua yang rasional bersifat riil". (Aristoteles)

"Tubuh memang memiliki usia, tetapi pikiran itu abadi" (Orochimaru, Naruto)

Teruntuk...

Ibunda Fatmawati, S.Pd dan Ayahanda Sembo Bahri, S.Pd, pemilik do'a dan kasih sayang yang tulus,

Serta untuk keluarga dari pihak Ibunda maupun Ayahanda terima kasih atas perhatiannya selama ini.

Semoga Allah membalas kebaikan kalian.

Aamiin.

ABSTRAK

Nur Fajri Setiawan. 2017. “Analisis dan Simulasi Model SITR pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar”. **Skripsi.** Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar. (dibimbing oleh Syafruddin Side dan Wahidah Sanusi).

Penelitian ini bertujuan untuk membahas mengenai model matematika SITR untuk penyebaran Penyakit Tuberkulosis. Data yang digunakan adalah data sekunder penderita tuberkulosis yang diperoleh dari Dinas Kesehatan Provinsi Sulawesi Selatan pada tahun 2015. Pembahasan dimulai dari membangun model matematika SITR penyakit Tuberkulosis, penentuan titik ekuilibrium, kemudian mencari analisis kestabilan titik ekuilibrium, menentukan nilai bilangan reproduksi dasar (R_0), membuat simulasi model, dan menginterpretasikannya. Dalam penelitian ini diperoleh model matematika SITR untuk penyakit tuberkulosis, dua titik ekuilibrium bebas penyakit dan endemik dari model SITR, kestabilan global keseimbangan bebas penyakit dan endemik dari model SITR dengan nilai bilangan reproduksi dasar $R_0 = 1,04336331$, ini menunjukkan bahwa penyakit tuberkulosis berstatus epidemik.

Kata Kunci: *model matematika, penyebaran penyakit, tuberkulosis, model SITR*

ABSTRACT

Nur Fajri Setiawan. 2017. "SITR Model Analysis and Simulation on the Spread of Tuberculosis in Makassar". **Thesis.** Department of Mathematics, Faculty of Mathematics and Natural Sciences, State University of Makassar (supervised by Syafruddin Side dan Wahidah Sanusi).

The purpose of this research is to discuss SITR mathematical model for the Spread of tuberculosis disease. The data used is secondary data of tuberculosis patients obtained from Public Health Office of South Sulawesi Province in 2015. The discussion starts from constructing an SITR mathematical model of tuberculosis disease, determining the equilibrium point, then looking for stability analysis of equilibrium point, determining the basic reproduction value (R_0), making model simulation, and interpreting them. In this study we obtained an SITR mathematical model for tuberculosis, disease-free and endemic equilibrium points of the SITR model, the global stability of disease-free and endemic equilibrium from the SITR model with the basic reproduction value $R_0 = 1,04336331$ indicates that tuberculosis disease is endemic.

Keyword: *mathematical model, spread of disease, tuberculosis, SITR model*

KATA PENGANTAR



Assalamu Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Syukur Alhamdulillah, segala puji bagi Allah SWT. atas berkat rahmat dan karunia-Nya sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi dengan judul “Analisis dan Simulasi Model SITR Pada Penyakit Tuberkulosis Di Kota Makassar” sebagai salah satu syarat dalam menyelesaikan studi di Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Negeri Makassar. Shalawat serta salam semoga senantiasa tercurah kepada nabi besar Muhammad SAW. para keluarga beliau, sahabat, dan kaum muslimin dan muslimah yang senantiasa istiqomah dalam ajarannya.

Ucapan terima kasih yang tak ada hingganya penulis haturkan pada kepada Ayahanda Sembo Bahri dan Ibunda Fatmawati atas segala doa, kasih sayang, nasihat, motivasi, serta berbagai macam bantuan tulus penuh kasih, baik secara moril maupun materil. Terima kasih atas bimbingan serta kesabaran dalam membesarkan penulis dari lahir hingga sekarang.

Doa terbaik dan ucapan terima kasih yang sebesar-besarnya pula penulis sampaikan, terutama kepada:

1. Bapak Prof. Dr. H. Husain Syam, M.Tp., Rektor Universitas Negeri Makassar.
2. Bapak Prof. Dr. Abdul Rahman, M.Pd., Dekan Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam.
3. Bapak Dr. Awi, M.Si., Ketua Jurusan Matematika atas segala bantuan yang diberikan.
4. Ibu Hj. Wahidah Sanusi, S.Si, M.Si, Ph.D., Ketua Program Studi Matematika, Jurusan Matematika FMIPA UNM.

5. Bapak Dr. Syafruddin Side, S.Si, M.Si, Ph.D., selaku Penasehat Akademik sekaligus pembimbing I dan Ibu Hj. Wahidah Sanusi, S.Si, M.Si, Ph.D., selaku Penasehat Akademik sekaligus pembimbing II atas segala bimbingan dan arahan yang diberikan kepada penulis dari awal kuliah hingga sampai pada tugas akhir ini.
6. Bapak Dr. H. Rahmat Syam, S.T. M.Kom selaku penguji I dan Bapak Sulaiman, S.Si., M.Kom, M.M., selaku penguji II atas segala saran dan arahan yang diberikan kepada penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
7. Bapak/Ibu dosen Jurusan Matematika FMIPA UNM yang telah menyalurkan ilmunya secara ikhlas serta mendidik penulis selama kuliah. Semoga apa yang diberikan senantiasa menjadi amal jariyah hingga akhir zaman.
8. Om dan Tante saya tercinta Tajuddin, Abd kadir, Fatimah dan Yuliana yang telah dengan sabar membimbing dan memotivasi saya, dan juga tak lupa mendoakan saya dalam proses penyelesaian tugas akhir saya.
9. Sepupu-sepupu tercinta Reska Anugrah yang senantiasa mendoakan dan memberikan dukungan moril maupun materil kepada penulis.
10. Sahabat-sahabat terbaik Andi Hasanuddin Baso, Nur Wahidah Sari, Hardiyanti Oktaviana, atas segala doa dan dukungan serta motivasi sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini.
11. Keluarga Matematika Sains 13, mahasiswa jurusan matematika yang tidak bisa saya sebutkan satu per satu atas segala dukungan dan motivasi terhadap penulis dalam menyelesaikan skripsi ini.
12. Keluarga Hasrat FMIPA UNM, kakak-kakak dan adik-adik atas segenap motivasi dan semangatnya kepada penulis.

Serta orang-orang yang telah ikhlas membantu penulis namun tidak dapat dituliskan oleh penulis. Penulis berharap semoga bantuan yang telah diberikan mendapat balasan dari Allah, sebagai amal jariyah dan pahala yang berlipat di sisi-Nya.

Akhirnya, semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi segenap pembaca.

Wassalamu Alaikum Warahmatullahi Wabarakatuh

Makassar, Juli 2017

Penulis

DAFTAR ISI

HALAMAN JUDUL	i
LEMBAR PENGESAHAN	ii
PERNYATAAN KEASLIAN.....	iii
PERSETUJUAN PUBLIKASI	iv
HALAMAN MOTTO DAN PERSEMBAHAN	v
ABSTRAK	vi
ABSTRACT	vii
KATA PENGANTAR.....	viii
DAFTAR ISI.....	xi
DAFTAR TABEL	xvii
DAFTAR GAMBAR.....	xviii
DAFTAR SIMBOL	xx
DAFTAR LAMPIRAN	xxii
 BAB I PENDAHULUAN.....	 1
A. Latar Belakang	1
B. Rumusan Masalah.....	4
C. Batasan Masalah	5
D. Tujuan Penelitian	5
E. Manfaat Penelitian	6
 BAB II TINJAUAN PUSTAKA	 7

A. Persamaan Diferensial.....	7
B. Analisis Kestabilan.....	10
C. Bilangan Reproduksi Dasar	11
D. Nilai Eigen dan Vektor Eigen	11
E. Matriks Jacobian	12
F. Kriteria <i>Routh-Hurwitz</i>	12
G. Linearisasi	14
H. Tuberkulosis.....	14
I. Penelitian-Penelitian Terdahulu	15
BAB III METODOLOGI PENELITIAN	20
A. Jenis Penelitian.....	20
B. Objek Kajian	20
C. Waktu dan Lokasi Penelitian	21
D. Prosedur Penelitian.....	21
E. Skema Penyelesaian Masalah	22
BAB IV HASIL DAN PEMBAHASAN	23
A. Hasil Penelitian	23
B. Pembahasan	48
BAB V PENUTUP.....	42
A. Kesimpulan	42
B. Saran.....	43
DAFTAR PUSTAKA.....	44
LAMPIRAN-LAMPIRAN	
RIWAYAT HIDUP	

DAFTAR TABEL

	Halaman
Tabel 2.1 Tabel Routh.....	13
Tabel 4.1 Routh-Hurwitz Bebas Penyakit	30
Table 4.2 Routh-Hurwitz Endemik.....	32
Tabel 4.3 Nilai Parameter pada Model SITS untuk Penyakit Tuberkulosis.....	35
Tabel 4.4 Syarat Awal Model SITS	35

DAFTAR GAMBAR

	Halaman
Gambar 2.1 Diagram Alir Model Matematika Tuberkulosis.....	16
Gambar 3.1 Skema Penyelesaian Masalah	22
Gambar 4.1 Skema Populasi Model SITR untuk Penyakit Tuberkulosis.....	25
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Susceptible</i> untuk Nilai Parameter 1	36
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Susceptible</i> untuk Nilai Parameter 2	39
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Susceptible</i> untuk Nilai Parameter 3	44
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Infected</i> untuk Nilai Parameter 1	37
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Infected</i> untuk Nilai Parameter 2	40
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Infected</i> untuk Nilai Parameter 3	45
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Treatment</i> untuk Nilai Parameter 1	37
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Treatment</i> untuk Nilai Parameter 2	41
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Treatment</i> untuk Nilai Parameter 3	45
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Recovered</i> untuk Nilai Parameter 1	38
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Recovered</i> untuk Nilai Parameter 2	40
Gambar 4.2 Proporsi Individu <i>Recovered</i> untuk Nilai Parameter 3	46
Gambar 4.6 Proporsi Gabungan Individu Model SITR Nilai Parameter 1	38
Gambar 4.6 Proporsi Gabungan Individu Model SITR Nilai Parameter 2	43
Gambar 4.6 Proporsi Gabungan Individu Model SITR Nilai Parameter 3	46

DAFTAR SIMBOL

b = angka kelahiran (*birth rate*)

μ = angka kematian alami (*mortality rate*)

β = laju penyebaran

α = pemberian treatment

γ = angka kesembuhan (*recovery rate*)

N = angka total populasi

bN = angka jumlah populasi yang lahir dalam populasi

βIS = angka besarnya populasi yang terinfeksi

BAB I

PENDAHULUAN

A. Latar Belakang

Model matematika merupakan sekumpulan persamaan atau pertidaksamaan yang mengungkapkan perilaku suatu permasalahan yang nyata. Model matematika yang dibuat berdasarkan asumsi-asumsi di dalam. Model matematika yang telah dibentuk akan dilakukan analisis, agar model yang dibuat representatif terhadap permasalahan yang dibahas. Banyak permasalahan yang timbul dari berbagai bidang ilmu, misalnya bidang kesehatan, kimia, biologi, dan lain-lain yang dapat dibuat model matematikanya (Maesaroh, 2013).

Model matematika untuk menganalisis penyebaran penyakit diantaranya ada model epidemi *SIR* (*Susceptible-Infected-Recovered*), *SEIR* (*Susceptible-Exposed-Infected-Recovered*), dan lainnya (Roni, 2011).

Tuberkulosis merupakan penyakit infeksi yang menyerang paru-paru dan disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis*. Penyakit ini dapat menyebar ke bagian tubuh lain seperti meningen (selaput yang melindungi sistem saraf pusat), ginjal, tulang, dan nodus limfe (kelenjar getah bening) (Somantri, 2007: 59).

Penyakit tuberkulosis termasuk ke dalam kelompok penyakit menular dan mematikan tanpa memperhatikan usia dan jenis kelamin. Penularan penyakit tuberkulosis dengan cara menyebarkan bakteri ke udara dalam bentuk droplet (percikan dahak) (Depkes RI, 2007).

Pada tahun 1993, TB telah menginfeksi sepertiga penduduk dunia dengan area penyebaran penyakit TB yang tidak terkendali di sebagian besar negara di dunia. Secara global pada tahun 2012 diperkirakan sekitar 12 juta kasus TB dan sekitar 1,2 kematian

yang disebabkan oleh penyakit tuberkulosis. Hal ini mengalami 2 penurunan yakni sekitar 11 juta kasus TB yang terjadi pada tahun 2013 dengan kasus kematian sekitar 1,1 juta (WHO, 2014).

Indonesia merupakan salah satu negara dengan pengidap penyakit TB terbanyak di dunia. Indonesia berada pada peringkat ketiga dunia setelah India dan China dengan sekitar 680.000 kasus TB yang terjadi pada tahun 2013 atau diperkirakan setiap 100.000 populasi terdapat 272 penderita TB. Angka kematian akibat penyakit tuberkulosis pada tahun 2013 yakni sekitar 64.000 jiwa atau diperkirakan setiap 100.000 populasi terdapat 25 penderita TB yang meninggal (WHO, 2014).

Untuk mengetahui penyebaran penyakit tuberkulosis, diperlukan suatu model matematika yang dapat merepresentasikan permasalahan yang terjadi guna mencegah penyebaran penyakit tersebut. Model matematika diperoleh melalui suatu proses penerjemahan permasalahan dalam kehidupan sehari-hari ke dalam bahasa matematika yang disebut dengan pemodelan matematika. Dari model matematika tersebut akan terbentuk suatu sistem persamaan diferensial yang dapat diketahui suatu titik kesetimbangannya (titik kritis atau titik ekuilibrium) dan menganalisis kestabilannya (Wulandari, 2013: 1).

Beberapa penelitian model epidemik penyakit tuberkulosis telah banyak dilakukan diantaranya penelitian yang dilakukan oleh K. Queena Fredlina, Tjokorda Bagus Oka, dan I Made Eka Dwipayana pada tahun 2012 yang meneliti tentang Model SIR (*Susceptible-Infectious-Recovered*) untuk Penyebaran Penyakit tuberkulosis dan penelitian yang dilakukan oleh Ulfasari Rafflesia pada tahun 2014 yang meneliti tentang Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis (TBC). Penelitian-penelitian tersebut menggunakan model SIR dan model SEI dengan pengaruh vaksinasi.

Model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis yang akan dibahas dalam penelitian ini adalah model epidemi Sitr. Model epidemi Sitr (*Susceptible-Infective-Treatment-Recovered*) merupakan model penyebaran penyakit yang membagi populasi menjadi empat subpopulasi, yaitu subpopulasi individu rentan (*Susceptible*), subpopulasi individu terinfeksi (*Infective*), subpopulasi individu yang melakukan pengobatan (*Treatment*) dan subpopulasi individu sembuh (*Recovered*). Model epidemi Sitr merupakan suatu pengembangan dari model klasik SIR. Model epidemi SIR mengasumsikan bahwa individu yang terinfeksi penyakit akan sembuh, sedangkan model Sitr mewakili suatu situasi ketika individu yang terinfeksi harus melakukan pengobatan untuk sembuh.

Tahap pengobatan sendiri sangat berguna untuk kesembuhan penyakit Tuberkulosis, dalam penelitian ini penulis akan memodifikasi model SIR dengan pengaruh vaksinasi sehingga mengkaji penelitian dengan judul **“Analisis dan Simulasi Model Sitr pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar”**.

Adapun beberapa penelitian terdahulu yang menjadi rujukan atau sumber yang relevan yang digunakan oleh penulis dalam menyelesaikan tugas akhir yaitu:

1. Model SIR (*Susceptible-Infectious-Recovered*) untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis (K. Queena Fredlina, dkk, 2012).
2. Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis (TBC) (Ulfasari Rafflesia (2014)

Berbeda dengan penelitian sebelumnya, pada penelitian ini akan dibahas tentang model epidemi Sitr merupakan suatu pengembangan dari model klasik SIR. Model epidemi SIR mengasumsikan bahwa individu yang terinfeksi penyakit akan sembuh, sedangkan model Sitr mewakili suatu situasi ketika individu yang terinfeksi harus melakukan pengobatan untuk sembuh.

B. Rumusan Masalah

Berdasarkan latar belakang masalah tersebut permasalahan yang akan dibahas adalah sebagai berikut:

1. Bagaimana membangun model matematika SITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis?
2. Bagaimana analisis model matematika SITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis?
3. Bagaimana implemetasi hasil simulasi model matematika SITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis menggunakan aplikasi *Maple*?

C. Batasan Masalah

Berdasarkan rumusan masalah di atas maka penulis memberi batasan masalah yaitu:

1. Pada penelitian ini, akan diformulasikan model matematika tanpa adanya pengaruh vaksinasi serta melakukan analisis kestabilan pada penyakit tuberkulosis dengan model SITR (*Susceptible, Infected, Treatment, Recovered*), kemudian mensimulasikan model tersebut.
2. Angka kelahiran dan angka kematian diasumsikan sama.
3. Data yang akan digunakan untuk simulasi model adalah data penderita penyakit tuberkolosis tahun 2015 di Dinas Kesehatan Prov. Sulawesi Selatan. Untuk simulasi model, digunakan perangkat lunak *Maple*.

D. Tujuan penelitian

Adapun tujuan dari penelitian ini adalah:

1. Untuk mengetahui cara membangun model matematika SITR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis.

2. Untuk mengetahui bagaimana analisis model matematika SISR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis.
3. Untuk mengetahui bagaimana implementasi hasil simulasi model matematika SISR untuk penyebaran penyakit tuberkulosis menggunakan aplikasi *Maple*.

E. Manfaat Penelitian

Adapun manfaat yang diharapkan dari penelitian ini adalah:

1. Bagi Penulis

Untuk menambah pengetahuan dan wawasan penulis khususnya dalam pemodelan matematika dan penerapannya serta dalam mengkaji permasalahan yang berkaitan dengan keilmuan lain, khususnya untuk penyebaran penyakit tuberkulosis dalam ilmu kedokteran serta permasalahan matematika dalam menyelesaikan masalah tersebut.

2. Bagi Mahasiswa Matematika

Menambah referensi mengenai penerapan matematika dalam bidang kesehatan, membantu dalam perkuliahan, terutama tentang model matematika dan persamaan diferensial serta mengetahui analisisnya..

3. Bagi Pembaca

Sebagai wahana dalam menambah pengetahuan tentang analisis model matematika penyebaran penyakit tuberkulosis.

BAB II

KAJIAN TEORI

A. Persamaan Differensial (Campbell & Haberman, 2008)

Persamaan diferensial adalah persamaan yang meliputi turunan fungsi dari satu atau lebih variabel terikat terhadap variabel bebas. Berdasarkan turunan fungsi terhadap variabel bebas, persamaan diferensial dibagi menjadi dua yaitu persamaan diferensial biasa dan persamaan diferensial parsial.

1. Persamaan Differensial Biasa (Campbell & Haberman, 2008)

Persamaan diferensial biasa adalah persamaan yang memuat turunan terhadap fungsi yang memuat satu variabel bebas. Jika x adalah fungsi dari t , maka berikut ini adalah contoh persamaan diferensial biasa dalam persamaan (2.1)

$$\frac{dx}{dt} = t^2 + \cos x \quad (2.1)$$

Order dari persamaan diferensial adalah turunan tertinggi pada fungsi tak diketahui (peubah tak bebas) yang muncul dalam persamaan diferensial. Persamaan diferensial (2.1) memiliki order satu.

Berdasarkan sifat kelinieran (pangkat satu) dari peubah tak bebasnya, persamaan diferensial biasa dapat dibedakan menjadi persamaan diferensial biasa linier dan persamaan diferensial biasa nonlinier.

i. Persamaan Differensial Biasa (PDB) Linier (Campbell & Haberman, 2008).

Bentuk umum dari persamaan diferensial biasa linier adalah sebagai berikut:

$$a_n(t) \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1}(t) \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1(t) \frac{dx}{dt} + a_0(t)x = f(t) \quad (2.2)$$

Dengan $a_n \neq 0, a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ disebut koefisien persamaan diferensial. Fungsi $f(t)$ disebut input atau unsur nonhomogen. Jika $f(t)$ disebut *input*, maka solusi

dari persamaan diferensial $x(t)$ biasanya disebut *output*. Jika ruas kanan $f(t)$ bernilai nol untuk semua nilai t dalam interval yang ditinjau, maka persamaan ini dikatakan homogen, jika sebaliknya maka dikatakan nonhomogen.

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x = \sin t$$

$$\frac{dx}{dt} = 2x + 3t \quad (2.3)$$

$$\frac{dx}{dt} = 8x$$

Persamaan (2.3) masing-masing merupakan PDB linier nonhomogen order tiga, PDB linier nonhomogen order satu, dan PDB linier homogen order satu.

ii. Persamaan Diferensial Biasa Nonlinier (Campbell & Haberman, 2008)

Jika persamaan diferensial biasa tidak dapat dinyatakan dalam bentuk (2.2), maka persamaan tersebut adalah persamaan diferensial biasa nonlinier. Contohnya adalah

$$\frac{d^3x}{dt^3} + x^2 = \sin t \quad (2.4)$$

$$\frac{dx}{dt} + x^2 = 0 \quad (2.5)$$

pada persamaan (2.4) adalah PDB nonlinier nonhomogen order tiga, sedangkan persamaan (2.5) adalah PDB nonlinier homogen order satu.

2. Persamaan Diferensial Parsial (Campbell & Haberman, 2008)

Persamaan diferensial parsial adalah persamaan yang memuat turunan-turunan parsial atau dapat dikatakan persamaan yang turunan fungsinya memuat lebih dari satu variabel bebas. Turunan parsial dinotasikan dengan subskrip sebagai berikut

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x}, u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$$

Sebagai contoh sederhana dari persamaan diferensial parsial dapat dilihat pada persamaan (2.6) berikut ini :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = cu \quad (2.6)$$

Pada persamaan (2.6), $u = u(x, y)$ adalah suatu fungsi dengan dua peubah bebas x dan y , serta c adalah konstanta. Karena derajat tertinggi dari turunan parsial yang muncul di dalam persamaan (2.6) adalah satu, maka persamaan (2.6) disebut persamaan diferensial parsial order satu. Bagian utama dari persamaan (2.6) adalah $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$ dengan fungsi u selalu tergantung kepada lebih dari satu peubah. Peubah u yang diturunkan itu disebut dengan peubah tak bebas, yang diturunkan terhadap peubah bebas.

Peubah dari suatu persamaan diferensial parsial adalah banyaknya peubah bebas yang terdapat di dalam persamaan tersebut. Persamaan (2.6) adalah persamaan diferensial parsial dengan dua peubah x dan y .

B. Analisis Kestabilan (olsder dan woude, 2004)

Kestabilan titik ekuilibrium dari suatu system persamaan diferensial baik linear maupun nonlinier dalam definisi berikut :

Diberikan system persamaan diferensial orde satu (2.10) dan $x(t, x_0)$

Adalah solusinya pada saat t dengan kondisi awal $x(0) = x_0$.

1. Vector \bar{x} memenuhi $f(\bar{x}) = 0$ dikatakan sebagai titik ekuilibrium
2. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan stabil jika diberikan $\varepsilon > 0$ terdapat $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sedemikian sehingga jika $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta$ (dengan $\|\cdot\|$ adalah norm pada R^n) maka $\|x(t, x_0) - \bar{x}\| < \varepsilon$ untuk $t \geq 0$.
3. Titik ekuilibrium stabil asimtotik jika titik-titik ekuilibriumnya stabil dan terdapat $\delta_1 > 0$ sedemikian sehingga $\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t, x_0) - \bar{x}\| = 0$, asalkan $\|x_0 - \bar{x}\| < \delta_1$.
4. Titik ekuilibrium \bar{x} dikatakan tidak stabil jika titik ekuilibrium tidak memenuhi point ke-2.

C. Bilangan Reproduksi Dasar (Mulisi, 2011)

Bilangan reproduksi dasar merupakan bilangan yang menunjukkan jumlah individu rentan yang dapat menderita penyakit yang disebabkan oleh satu individu terinfeksi. Bilangan reproduksi dasar dilambangkan dengan R_0 dengan beberapa kondisi yang akan timbul, yaitu :

1. Jika $R_0 < 1$, maka penyakit akan menghilang.
2. Jika $R_0 = 1$, maka penyakit akan menetap.
3. Jika $R_0 > 1$, maka penyakit akan meningkat menjadi wabah.

D. Nilai Eigen dan Vektor Eigen (Side, 2013)

Jika A adalah suatu matriks berordo $n \times n$, maka vector tak nol x pada R^n disebut suatu **vector eigen** (eigen vector) dari A jika Ax adalah suatu penggandaan skalar x yaitu :

$$Ax = \lambda x \quad (2.7)$$

Untuk skalar λ . Skalar λ disebut nilai eigen dari A , dan x disebut suatu vector eigen yang bersesuaian dengan nilai eigen λ .

Nilai-nilai eigen dan vector eigen mempunyai tafsiran geometric yang bermanfaat dalam R^2 dan R^3 . Pada R^2 dan R^3 perkalian dengan A memetakan x dari A ke garis yang melalui titik asal sama dengan x .

Untuk mencari kembali nilai eigen dari suatu matriks yang berukuran $n \times n$, maka kita tuliskan kembali $Ax = \lambda x$ sebagai :

$$Ax = \lambda Ix \text{ atau } (A - I\lambda)x = 0 \quad (2.8)$$

E. Matriks Jacobian (Olsder & Woude, 2004)

Diberikan $f = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ pada sistem (2.9) dengan $f_i \in C^1(E)$, $i = 1, 2, \dots, n$

$$\text{Matriks } J(f(x)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(x) \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(x) \cdots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(x) \\ \vdots & \vdots & \ddots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x) & \frac{\partial f_n}{\partial x_2}(x) \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x) \end{bmatrix}$$

Dinamakan matriks Jacobian dari f dititik x .

F. Kriteria Routh-Hurwitz (Effendy, 2013)

Kriteria kestabilan Routh-Hurwitz merupakan suatu metode yang digunakan untuk menunjukkan kestabilan sistem dengan memperhatikan koefisien dari persamaan karakteristik tanpa menghitung akar-akar secara langsung. Jika persamaan polinom adalah persamaan karakteristik, maka metode ini dapat digunakan untuk menentukan kestabilan dari suatu sistem. Prosedurnya adalah sebagai berikut:

1. Persamaan polinom orde- n ditulis dalam bentuk seperti berikut:

$$a_0 S^n + a_1 S^{n-1} + a_2 S^{n-2} + a_3 S^{n-3} + \cdots + a_{n-1} S + a_n = 0$$

Dengan koefisien-koefisien adalah besaran nyata dan $a_n \neq 0$

2. Bila ada koefisien yang bernilai 0 atau negatif disamping adanya koefisien positif, maka hal ini menunjukkan ada satu akar atau akar-akar imajiner atau memiliki bagian real positif (sistem tak stabil). Kondisi perlu (tetapi belum cukup) untuk stabil adalah semua koefisien persamaan polinom positif dan lengkap.
3. Bila semua koefisien positif, buat tabel *Routh* seperti berikut:

S^n	a_0	a_2	a_4	a_6	\cdots	a_{n-1}
S^{n-1}	a_1	a_3	a_5	a_7	\cdots	a_n
S^{n-2}	b_1	b_2	b_3	b_4	\cdots	b_n
S^{n-3}	c_1	c_2	c_3	c_4	\cdots	c_n
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
S^0						

Tabel 2.1 Tabel *Routh*

Dimana nilai b_i, c_i, \dots didefinisikan sebagai berikut:

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1} & c_1 &= \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1} \\
 b_2 &= \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1} & c_2 &= \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1} \\
 b_3 &= \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1} & c_3 &= \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1} \\
 &\vdots & &\vdots \\
 b_n &= \frac{a_1 a_{2n} - a_0 a_{2n+1}}{a_1} & c_n &= \frac{b_1 a_{2n+1} - a_1 b_{n+1}}{b_1}
 \end{aligned}$$

- d. Banyaknya akar tak stabil dapat dilihat dari banyaknya perubahan tanda padakolom pertama *Routh*
- e. Syarat perlu untuk stabil adalah koefisien dari persamaan karakteristik positif dan syarat cukup untuk stabil adalah semua suku pada kolom pertama tabel Routh bertanda positif.

G. Linearisasi (Meiss, 2007)

Defnisi 2.5

sistem $\dot{x} = J(f(\bar{x}))x$ disebut linearisasi dari sistem 2.1 di (\bar{x}) . Dengan menggunakan matriks Jacobian $J(f(\bar{x}))$, sifat kestabilan titik equilibrium \bar{x} dapat diketahui asalkan titik tersebut hiperbolik.

Defnisi 2.6

Titik equilibrium \bar{x} disebut titik equilibrium hiperbolik jika semua nilai eigen $Jf(\bar{x})$ mempunyai bagian real tak nol.

H. Tuberkulosis

Tuberkulosis merupakan penyakit infeksi yang menyerang paru-paru dan disebabkan oleh *Mycobacterium tuberculosis*. Penyakit ini dapat menyebar ke bagian tubuh lain seperti meningen (selaput yang melindungi sistem saraf pusat), ginjal, tulang, dan nodus limfe (kelenjar getah bening) (Somantri, 2007: 59). Penyakit tuberkulosis termasuk ke dalam kelompok penyakit menular dan mematikan tanpa memperhatikan usia dan jenis kelamin. Penularan penyakit tuberkulosis dengan cara menyebarkan bakteri ke udara dalam bentuk droplet (percikan dahak) (Depkes RI, 2007).

Pada tahun 1993, TB telah menginfeksi sepertiga penduduk dunia dengan area penyebaran penyakit TB yang tidak terkendali di sebagian besar negara di dunia. Secara global pada tahun 2012 diperkirakan sekitar 12 juta kasus TB dan sekitar 1,2 kematian yang disebabkan oleh penyakit tuberkulosis. Hal ini mengalami 2 penurunan yakni sekitar 11 juta kasus TB yang terjadi pada tahun 2013 dengan kasus kematian sekitar 1,1 juta (WHO, 2014).

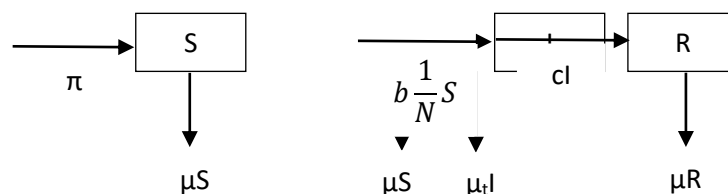
Indonesia merupakan salah satu negara dengan pengidap penyakit TB terbanyak di dunia. Indonesia berada pada peringkat ketiga dunia setelah India dan China dengan sekitar 680.000 kasus TB yang terjadi pada tahun 2013 atau diperkirakan setiap 100.000

populasi terdapat 272 penderita TB. Angka kematian akibat penyakit tuberkulosis pada tahun 2013 yakni sekitar 64.000 jiwa atau diperkirakan setiap 100.000 populasi terdapat 25 penderita TB yang meninggal (WHO, 2014).

I. Penelitian-Penelitian Terdahulu

a. K. Queena Fredlina, Tjokorda Bagus Oka, dan I Made Eka Dwipayana (2012).

Dalam penelitiannya berjudul Model SIR (*Susceptible-Infectious-Recovered*) untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis, model matematika SIR pada penyebaran penyakit Tuberkulosis adalah:



Gambar 2.1 Diagram Alir Model Matematika Tuberkulosis

Berdasarkan asumsi dan Gambar 1 maka model matematika dari penyebaran penyakit tuberkulosis adalah:

$$\frac{dS}{dt} = -b \frac{1}{N} S - \mu S + \pi$$

$$\frac{dI}{dt} = b \frac{1}{N} S - (\mu + \mu_t + c) I$$

$$\frac{dR}{dt} = cI - \mu R$$

$$\text{Dengan } N = S + I + R$$

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah diteliti, maka diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Cara mengonstruksi model matematika untuk penyebaran penyakit tuberkulosis dilakukan dengan 4 tahapan yaitu (1) melakukan identifikasi masalah, (2) membuat asumsi terhadap faktor-faktor yang mempengaruhi penyebaran tuberkulosis, (3) menganalisis parameter, (4) melakukan simulasi untuk menguji hasil analisis parameter.
2. Dengan menganalisis model matematika yang terbentuk, dapat dilihat parameter yang berpengaruh paling signifikan dalam penyebaran penyakit tuberkulosis adalah laju penularan penyakit (b) dan laju kesembuhan (c). Parameter lain yaitu laju kematian karena faktor lain (u), kematian karena tuberkulosis (u_t), dan kelahiran penduduk (π) tidak dapat dirubah, karena parameter tersebut terjadi secara alami dalam kehidupan nyata. Namun laju penularan dan laju kesembuhan lebih dapat dipengaruhi. Salah satu cara untuk menurunkan laju penularan adalah dengan menjauhkan individu yang terinfeksi TB dengan populasi rentan, sedangkan untuk meningkatkan laju kesembuhan perlu dilakukan pengobatan yang maksimal.

b. Ulfasari Rafflesia (2014)

Dalam penelitiannya berjudul Model Penyebaran Penyakit Tuberkulosis (TBC), model matematika SEI pada penyebaran penyakit tuberkulosis adalah:

$$\frac{dS_u}{dt} = (1 - cq)\Pi - \beta_u S_u I + \omega S_v - \mu S_u,$$

$$\frac{dS_v}{dt} = cq\Pi - \beta_v S_v I - \omega S_v - \mu S_u,$$

$$\frac{dE_u}{dt} = (1 - p_u)\beta_u S_u I - v_u E_u - \mu E_u,$$

$$\frac{dE_v}{dt} = (1 - p_v)\beta_v S_v I - v_v E_v - \mu E_v,$$

$$\frac{dI}{dt} = p_u\beta_u S_u I - p_v\beta_v S_v I + v_u E_u + v_v E_v - (\mu + \mu_T + \delta)I \quad N =$$

$$N(t) = S_u(t) + S_v(t) + E_u(t) + E_v(t) + I(t)$$

Berdasarkan hasil analisis dan pembahasan yang telah diteliti, maka diperoleh kesimpulan bahwa pemberian vaksinasi pada individu *susceptible* memberikan pengaruh terhadap penyebaran penyakit TBC.

Berbeda dengan penelitian sebelumnya, pada penelitian ini akan dibahas tentang model epidemi SITR merupakan suatu pengembangan dari model klasik SIR. Model epidemi SIR mengasumsikan bahwa individu yang terinfeksi penyakit akan sembuh, sedangkan model SITR mewakili suatu situasi ketika individu yang terinfeksi harus melakukan pengobatan untuk sembuh.

BAB III

METODE PENELITIAN

A. Jenis Penelitian

Jenis Penelitian yang digunakan adalah penelitian teori dan terapan, yaitu penelitian yang diarahkan untuk mendapatkan informasi yang dapat digunakan untuk memecahkan masalah dengan terlebih dahulu menyusun konsep-konsep sesuai kebutuhan. Pada penelitian ini, penulis melakukan pengambilan data penderita penyakit tuberkulosis pada tahun 2015 di Dinas Kesehatan Kota Makassar.

B. Objek Kajian

Penelitian ini bersifat kajian literatur yaitu proses pengumpulan data kemudian menganalisis data tersebut sebagai bahan referensi dari Perpustakaan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar maupun dari sumber-sumber lain yang berkaitan dengan pemodelan matematika dan materi-materi prasyarat lainnya.

C. Waktu dan Lokasi Penelitian

Penelitian ini akan dilaksanakan pada bulan Februari 2017 – April 2017 dan penelitian ini dilakukan di Perpustakaan Jurusan Matematika Fakultas Matematika dan Ilmu

Pengetahuan Alam Universitas Negeri Makassar sebagai lokasi dalam pengumpulan literatur untuk penulisan, serta Dinas Kesehatan Kota Makassar Sulawesi Selatan sebagai lokasi pengambilan data.

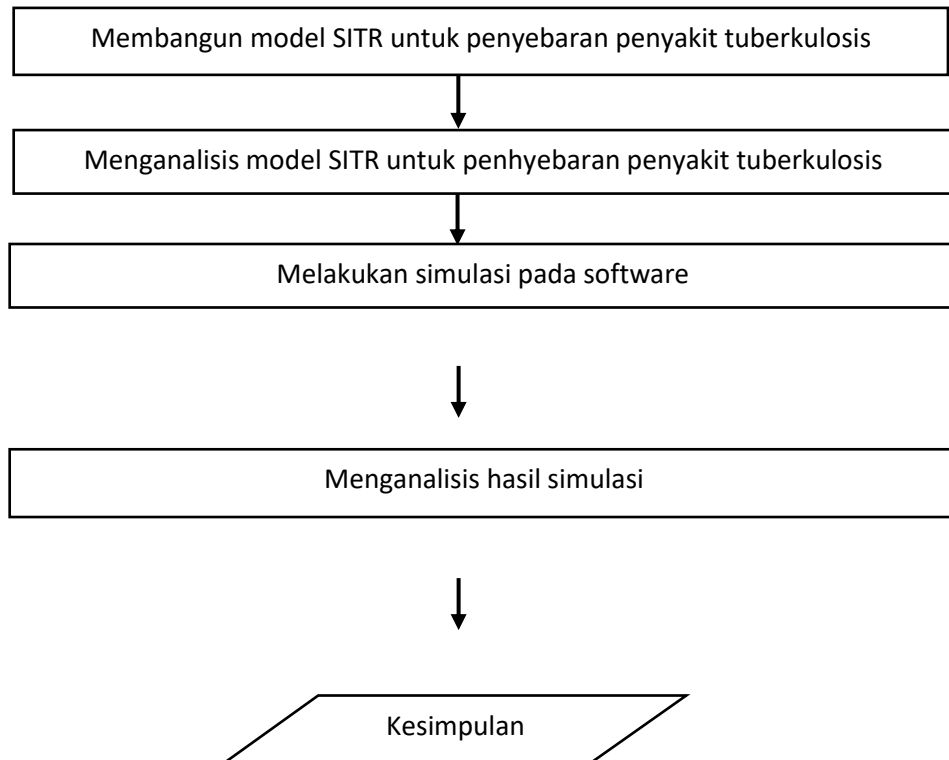
D. Prosedur Penelitian

Prosedur penelitian yang diterapkan dalam penelitian ini guna mencapai tujuan penelitian, adalah sebagai berikut:

1. Membangun model Sitr untuk penyebaran penyakit tuberkulosis.
 - a. Mengasumsikan variabel dan parameter model Sitr.
 - b. Membentuk model Sitr.
2. Menganalisis model Sitr untuk penyebaran penyakit tuberkulosis.
 - a. Menentukan titik tetap model Sitr
 - b. Menentukan tipe kestabilan titik tetap berdasarkan nilai eigen
 - c. Menentukan bilangan reproduksi dasar (R_0)
3. Mengimplementasikan hasil simulasi penyebaran penyakit tuberkulosis dengan menggunakan *Matlab*.
 - a. Mengumpulkan data pasien yang terkena tuberkulosis yang didapatkan dari Dinas Kesehatan Kota Makassar.
 - b. Menginput data pasien yang terkena tuberkulosis yang didapatkan dari Dinas Kesehatan Kota Makassar.
 - c. Menginput hasil analisis model kedalam software.
 - d. Menganalisis hasil simulasi.
 - e. Menarik kesimpulan.

E. Skema Penyelesaian Masalah

Selanjutnya langkah-langkah yang telah dijelaskan diatas dapat digambarka secara skematik pada gambar sebagai berikut:



Gambar 3.1 Skema Penyelesaian Masalah

BAB IV

HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada bab ini, diuraikan penurunan model matematika SITR pada penularan penyakit tuberkulosis yang merupakan sistem persamaan differensial biasa berdimensi empat. Model matematika SITR tersebut kemudian dianalisis kestabilannya, selanjutnya dilakukan simulasi model.

A. Hasil Penelitian

1. Membangun Model SITR untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

a. Asumsi Variabel dan Parameter Model SITR

Dalam model penyebaran penyakit tuberkulosis ini populasi manusia dibagi menjadi 4 kelas, yaitu kelas rentan/*susceptible* (S) yang menyatakan kelas individu yang belum terjangkit penyakit tuberkulosis dan berpotensi terkena penyakit tersebut, kelas terinfeksi/*infectious* (I) yang menyatakan kelas individu yang terinfeksi oleh virus *Mycobacterium tuberculosis* dan memiliki kemampuan menularkan virus *Mycobacterium tuberculosis* tersebut kepada manusia lainnya, kelas pengobatan/*treatment* (T) yang menyatakan kelas individu yang terinfeksi penyakit tuberkulosis lalu mendapatkan pengobatan atau *treatment*, kelas sembuh/*recovery* (R) yang menyatakan kelas individu yang telah sembuh dari infeksi virus.

Ada beberapa asumsi yang digunakan dalam pembentukan model, yaitu:

1. Terdapat kelahiran dan kematian dalam suatu populasi
2. Setiap individu yang lahir akan menjadi rentan
3. Penyakit berbahaya, jika terinfeksi dapat menimbulkan kematian
4. Individu yang telah terinfeksi jika diberikan *treatment* akan kebal terhadap penyakit tuberkulosis dan tidak menjadi rentan kembali

5. Populasi konstan (tertutup),

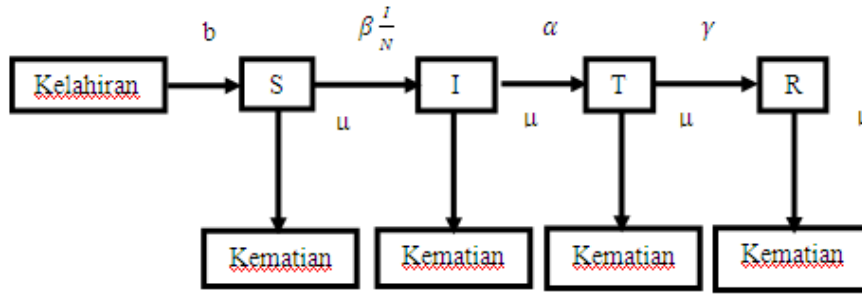
Artinya $N = (S(t)) + (I(t)) + (T(t)) + (R(t))$. Jumlah populasi dalam waktu t sama dengan jumlah individu rentan, terinfeksi, terobati dan sembuh.

Parameter yang digunakan dalam pembuatan model penyebaran penyakit tuberkulosis ini adalah sebagai berikut:

1. b = angka kelahiran (*birth rate*)
2. μ = angka kematian alami (*mortality rate*)
3. β = laju penyebaran
4. α = pemberian treatment
5. γ = angka kesembuhan (*recovery rate*)
6. N = angka total populasi
7. bN = angka jumlah populasi yang lahir dalam populasi
8. βIS = angka besarnya populasi yang terinfeksi

b. Pembentukan Model SITR

Perubahan yang terjadi pada setiap grup manusia dapat ditafsirkan dalam bentuk sebagai berikut:



Gambar 4.1 Skema Populasi Model SITR untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

Gambar 4.1 dapat ditafsirkan dalam bentuk model matematika yaitu model yang merupakan persamaan differensial tidak linear sebagai berikut:

Populasi manusia

$$\frac{dS}{dt} = bN - \beta \frac{I}{N} S - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - \alpha I - \mu I \quad (4.1)$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha I - \gamma T - \mu T$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma T - \mu R$$

2. Analisis Model SITR untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis

a. Penentuan Titik Tetap

pada sub-bab ini akan dicari titik tetap berdasarkan persamaan (4.6). Titik tetap diperoleh dengan cara menyelesaikan persamaan

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dI}{dt} = \frac{dT}{dt} = \frac{dR}{dt} = 0.$$

Persamaan (4.1) memiliki dua jenis titik tetap, yaitu titik tetap tanpa penyakit (*disease-free equilibrium*) x_{dfe} dan titik tetap endemik (*endemic equilibrium*) x_{ee} .

Dengan menggunakan *software* berbasis fungsional, diperoleh titik tetap x_{dfe}

$$x_{dfe}(S, I, T, R) = (S^*, 0, 0, 0), \quad (4.2)$$

Dengan

$$S^* = \frac{bN}{\mu},$$

Untuk $\frac{dS}{dt} = 0$ maka:

$$bN - \frac{\beta I}{N}S - \mu S = 0$$

$$bN - \left(\frac{\beta I}{N} + \mu\right)S = 0$$

$$-\left(\frac{\beta I}{N} + \mu\right)S = -bN$$

$$\mu S = bN$$

$$S = \frac{bN}{\mu}$$

Dan titik tetap \mathbf{x}_{ee}

$$\mathbf{x}_{ee}(S, I, T, R) = (S^{**}, I^{**}, T^{**}, R^{**}), \quad (4.3)$$

Dengan

$$S^{**} = \frac{(\alpha I + \mu I)N}{\beta I}$$

$$T^{**} = \frac{\alpha I}{\gamma + \mu}$$

$$I^{**} = \frac{(bN - \mu S)N}{\beta S}$$

$$R^{**} = \frac{\gamma T}{\mu}$$

Untuk $\frac{dS}{dt} = 0$ maka:

$$\beta \frac{I}{N}S - \alpha I - \mu I = 0$$

$$\beta \frac{I}{N}S = \alpha I + \mu I$$

$$S = \frac{\alpha I + \mu I}{\frac{\beta I}{N}}$$

$$S^{**} = \frac{(\alpha I + \mu I)N}{\beta I}$$

Untuk $\frac{dI}{dt} = 0$ maka:

$$bN - \beta S \frac{I}{N} - \mu S = 0$$

$$\beta S \frac{I}{N} = bN - \mu S$$

$$I^{**} = \frac{(bN - \mu S)N}{\beta S}$$

Untuk $\frac{dT}{dt} = 0$ maka:

$$\alpha I - \gamma T - \mu T = 0$$

$$\alpha I - (\gamma + \mu)T = 0$$

$$(\gamma + \mu)T = \alpha I$$

$$T^{**} = \frac{\alpha I}{\gamma + \mu}$$

Untuk $\frac{dR}{dt} = 0$ maka:

$$\gamma T - \mu R = 0$$

$$\mu R = \gamma T$$

$$R^{**} = \frac{\gamma T}{\mu}$$

b. Analisis Kestabilan Titik Tetap

Pada bagian ini, dilakukan analisis untuk melihat sifat kestabilan pada titik tetap bebas penyakit.

Penentuan Matriks Jacobian

Misalkan diberikan persamaan (4.1) didefinisikan sebagai fungsi berikut

$$\dot{x} = f(x), x \in R^4, \quad (4.4)$$

Dengan $x \in R^4$ adalah variabel-variabel yang terdapat pada persamaan (4.4).

Matriks Jacobian dari persamaan (4.4) didefinisikan sebagai

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\delta f_1}{\delta S} & \frac{\delta f_1}{\delta E} & \frac{\delta f_1}{\delta I} & \frac{\delta f_1}{\delta R} \\ \frac{\delta f_2}{\delta S} & \frac{\delta f_2}{\delta E} & \frac{\delta f_2}{\delta I} & \frac{\delta f_2}{\delta R} \\ \frac{\delta f_3}{\delta S} & \frac{\delta f_3}{\delta E} & \frac{\delta f_3}{\delta I} & \frac{\delta f_3}{\delta R} \\ \frac{\delta f_4}{\delta S} & \frac{\delta f_4}{\delta E} & \frac{\delta f_4}{\delta I} & \frac{\delta f_4}{\delta R} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\beta \frac{I}{N} - \mu & -\beta \frac{S}{N} & 0 & 0 \\ \beta \frac{I}{N} & \frac{\beta S}{N} - \alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Penentuan Matriks Jacobian untuk Titik Tetap tanpa Penyakit

Sifat kestabilan titik tetap $\mathbf{x}_{dfe} = (\frac{bN}{\mu}, 0, 0, 0)$ dapat dilakukan dengan melakukan pelinearan pada sistem persamaan differensial (4.4) di sekitar \mathbf{x}_{dfe} , sehingga diperoleh matriks Jacobian untuk titik tetap tanpa penyakit sebagai berikut

$$J_0 = \begin{bmatrix} -\mu & \frac{-\beta b N^2}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\beta b N^2}{\mu} - \alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix}$$

Mencari nilai eigen matriks jacobian dipersekitaran \mathbf{x}_{dfe} .

$$|J_0 - \lambda I| = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} -\mu & \frac{-\beta b N^2}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\beta b N^2}{\mu} - \alpha - \mu & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma - \mu & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$\det \left[\begin{bmatrix} -\mu - \lambda & \frac{-\beta b N^2}{\mu} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-\beta b N^2}{\mu} - \alpha - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & \gamma - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{bmatrix} \right] = 0$$

$$(-\mu - \lambda) x \det = \begin{bmatrix} \frac{\beta b N^2}{\mu} - \alpha - \mu - \lambda & 0 & 0 \\ \alpha & -\gamma - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{bmatrix}$$

$$(-\mu - c)(-\mu - \lambda)x \det = \begin{bmatrix} \frac{\beta b N^2}{\mu} - \alpha - \mu - \lambda & 0 \\ \alpha & \gamma - \mu - \lambda \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut :

$$(-\lambda - \mu)(-\lambda - \mu) \left(\frac{-\beta b N^2}{\mu} - \alpha - \mu - \lambda \right) (\gamma - \mu - \lambda) = 0$$

$$(\mu^2 + \lambda^2 + 2\mu\lambda) \left(\frac{-\beta b N^2}{\mu} - \alpha - \mu - \lambda \right) (\gamma - \mu - \lambda) = 0$$

$$\begin{aligned} & \lambda^4 + \left(\frac{-\beta b N^2}{\mu} - \alpha - \gamma - \mu \right) \lambda^3 \\ & + \left(\frac{-\beta b N^2 \gamma}{\mu} - 3\beta b N^2 - \alpha \gamma + 3\alpha \mu + 2\mu^2 - \gamma \mu + \mu - 2\mu \gamma \right) \lambda^2 \\ & + (3\alpha \mu^2 + 2\alpha \gamma \mu + 2\mu^3 + 3\mu^2 \gamma + 2\beta b N^2 \gamma + \beta N^2 \mu) \lambda \\ & + (\beta b N^2 \gamma \mu - \beta b N^2 \mu^2 - \alpha \gamma \mu^2 - \alpha \mu^3 + \mu^4 + \mu^3 \gamma) = 0 \end{aligned}$$

Untuk polinomial orde lima, analisis kestabilannya menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Sehingga dapat dibuat tabel *Routh Hurwitz* seperti Tabel 4.1 berikut:

λ^4	1	b	d
λ^4	A	c	0
λ^3	$\frac{ab - c}{a}$	$\frac{ad}{a}$	
λ^2	$\frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)c - a\left(\frac{ad}{a}\right)}{\frac{ab-c}{a}} = c - a\left(\frac{ad}{ab-c}\right)$	0	

$$\lambda^1 \quad \frac{\left(c-a \left(\frac{ad}{ab-c}\right)\right)\left(\left(\frac{ad}{a}\right)\right)}{c-a \left(\frac{ad}{ab-c}\right)} = \frac{ad}{a} = a \quad 0$$

Karena semua suku positif maka sistem tersebut stabil, maka syarat perlu dan cukup untuk stabil terpenuhi. Sistem stabil saat $e > 0$ dimana parameternya $\epsilon \in [0,1]$.

Penentuan Matriks Jacobian untuk Titik Tetap Endemik

Sifat kestabilan titik tetap $x_{ee} = (\frac{bN}{\mu}, 0, 0, 0)$ dapat dilakukan dengan melakukan pelinearan pada sistem persamaan differensial (4.4) di sekitar x_{ee} , sehingga diperoleh matriks Jacobian untuk titik tetap endemik sebagai berikut

$$J_1 = \begin{bmatrix} -\beta \frac{I}{N} - \mu & \frac{-\beta S}{N} & 0 & 0 \\ \beta \frac{I}{N} & \beta - \alpha - \mu & -\gamma - \mu & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Mencari nilai eigen matriks jacobian dipersekitaran E_1 .

$$|\lambda I - J_1| = 0$$

$$\text{Det} \left\| \begin{bmatrix} -\beta \frac{I}{N} - \mu & \frac{-\beta S}{N} & 0 & 0 \\ \beta \frac{I}{N} & \beta - \alpha - \mu & -\gamma - \mu & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$\text{Det} \left\| \begin{bmatrix} -\beta \frac{I}{N} - \mu - \lambda & \frac{-\beta S}{N} & 0 & 0 \\ \beta \frac{I}{N} & \frac{-\beta S}{N} - \alpha - \mu - \lambda & -\gamma - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & \alpha & \gamma & -\mu - \lambda \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\| = 0$$

$$(-\mu - \lambda) x \det = \begin{bmatrix} \frac{\beta I}{N} - \mu - \lambda & \frac{-\beta S}{N} & 0 \\ \frac{\beta I}{N} & \frac{-\beta S}{N} - a - \mu - \lambda & 0 \\ 0 & \gamma & -\mu - \lambda \end{bmatrix}$$

$$(-\mu - \lambda)(-\gamma - \mu - \lambda)x \det = \begin{bmatrix} \frac{\beta I}{N} - \mu - \lambda & \frac{-\beta S}{N} \\ \frac{\beta I}{N} & \frac{-\beta S}{N} - a - \mu - \lambda \end{bmatrix}$$

Sehingga diperoleh persamaan karakteristiknya adalah sebagai berikut : $\left(\frac{\beta I}{N^2}\right) \lambda^4 +$

$$\begin{aligned} & \left(-3 \frac{\beta^2 I S \mu}{N^4} - \frac{\beta^3 I^2 S}{N^3} - \frac{\beta^2 I S \gamma}{N^2} - \frac{\beta^2 I S \mu}{N^2} - \frac{\beta^2 S^2 I}{N^3} - \frac{\beta^2 I S}{N^2}\right) \lambda^3 + \left(-\frac{\beta^2 I S \mu^2}{N^3} - \frac{\beta^2 I S \alpha \mu}{N^2} - \frac{\beta^2 S^2 I \mu}{N^3} - \right. \\ & \frac{\beta^3 I^2 S \mu}{N^3} - \frac{\beta I^2 \alpha S}{N^3} - \frac{\beta^3 S^2 I^2}{N^4} - \frac{\beta^2 \mu I S \gamma}{N^2} - \frac{\beta^2 \mu I S \gamma}{N^2} - \frac{\beta^2 I S \alpha \gamma}{N^2} - \frac{\beta^3 \alpha I S \gamma}{N^2} - \frac{\beta^3 I S^2 \gamma}{N^3} - \frac{\beta^2 I S \mu \gamma}{N^3} - \\ & \frac{\beta^2 I S \gamma}{N^3} - \frac{\beta^3 I^2 S \gamma}{N^3} - 3 \frac{\beta^2 \mu^2 I S}{N^2} - 3 \frac{\beta^2 I S \alpha \mu}{N^2} - 2 \frac{\beta^3 \mu I S^2}{N^3} - 2 \frac{\beta^2 \mu^2 I S}{N^3} - 2 \frac{\beta^3 \mu I^2 S}{N^3} - \\ & \left. 2 \frac{\beta^2 \mu^2 I^2 S}{N^3}\right) \lambda^2 + \left(\frac{-\beta^2 I S \mu^2 \gamma}{N^3} - 2 \frac{\beta^2 I S^2 \mu^2 \gamma}{N^2} - \frac{\beta^3 I^2 S \mu \gamma}{N^3} - \frac{\beta^3 I S^2 \mu \gamma}{N^3} - \frac{\beta^2 I^2 \alpha S \gamma}{N^3} - \frac{\beta^3 S^2 I \gamma}{N^4} - \right. \\ & 2 \frac{\beta^3 I S \mu^3}{N^3} - 2 \frac{\beta^2 I S \mu^2 \alpha}{N^2} - 2 \frac{\beta^3 I S^2 \mu^2}{N^3} - 2 \frac{\beta^3 I^2 S \mu^2}{N^3} - 2 \frac{\beta^3 I^2 \alpha S \mu}{N^3} - 2 \frac{\beta^3 I^2 S^2 \mu}{N^4} - \frac{\beta^2 I S \mu^3}{N^2} - \\ & 2 \frac{\beta^2 \alpha I S \mu^2}{N^2} - \frac{\beta^3 I S^2 \mu^4}{N^3} - \frac{\beta^2 I S \mu^3}{N^3} - 2 \frac{\beta^3 I S \mu^2}{N^3} - \frac{\beta^2 I S \mu^2 \gamma}{N^2} - \frac{\beta^2 I S \alpha \mu \gamma}{N^2}\left.) \lambda + \left(\frac{\beta^3 I S^2 \mu \gamma}{N^3} - \frac{\beta^2 \alpha I S \mu \gamma}{N^2} - \right. \right. \\ & \frac{\beta I^2 S \mu \gamma}{N^3} - \frac{\beta^3 I^2 \alpha S \mu \gamma}{N^3} - \frac{\beta^3 I^2 S \mu^2 \gamma}{N^3} - \frac{\beta^3 I S^2 \mu^2 \gamma}{N^3} - \frac{\beta^2 I S \alpha \mu \gamma}{N^2} - \frac{\beta^2 I S \alpha \mu^2}{N^2} - \frac{\beta^2 I S \mu^3 \gamma}{N^3} - \frac{\beta^3 I^2 S^2 \mu^2}{N^4} - \\ & \left. \frac{\beta^3 I^2 \alpha S \mu^2}{N^3} - \frac{\beta^3 I^2 S \mu^3}{N^3} - \frac{\beta^3 I S^2 \mu^3}{N^2} - \frac{\beta^2 I S \alpha \mu^3}{N^2} - \frac{\beta^2 I S \mu^3}{N^3}\right). \end{aligned}$$

Analisis kestabilannya menggunakan kriteria *Routh-Hurwitz*. Sehingga dapat dibuat tabel *Routh-Hurwitz* seperti Tabel 4.2 berikut :

Tabel 4.2 *Routh Hurwitz*

λ^5	1	B	d	0
λ^4	A	c	e	0
λ^3	$\frac{ab - c}{a}$	$\frac{ad - e}{a}$	0	

$$\lambda^2 \quad \frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)c - a\left(\frac{ad-e}{a}\right)}{\frac{ab-c}{a}} = c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a \quad \frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)e}{\frac{ab-c}{a}} = e$$

$$\lambda^1 \quad \frac{\left(c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a\right)\left(\left(\frac{ad-e}{a}\right)\right) - \left(\frac{ab-c}{a}\right)e}{c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a} = 0$$

$$\left(\frac{ad-e}{a}\right) - \frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)e}{c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a}$$

$$\lambda^0 \quad \frac{\left(\left(\frac{ad-e}{a}\right) - \frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)e}{c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a}\right)e}{\left(\frac{ad-e}{a}\right) - \frac{\left(\frac{ab-c}{a}\right)e}{c - \left(\frac{ad-e}{ab-c}\right)a}} = e$$

Polinomial orde lima mempunyai akar negatif pada bagian realnya jika dan hanya jika elemen-elemen pada kolom pertama tabel *routh-Hurwitz* mempunyai tanda yang sama. Sehingga diperoleh ketika $R_0 > 1$ maka titik setimbang endemik stabil asimtotik.

Penentuan Bilangan Reproduksi Dasar (R_0)

Tingkat penyebaran suatu penyakit menular dalam suatu wilayah dapat ditunjukkan oleh nilai bilangan reproduksi dasar (R_0). Bilangan reproduksi dasar dari penyakit tuberkulosis diperoleh dengan menentukan nilai eigen dari matriks Jacobian dari suatu sistem persamaan yang dihitung pada titik kesetimbangan bebas penyakit.

Diberikan persamaan polinomial orde empat:

$$\begin{aligned}
& \lambda^4 + \left(\frac{-\beta b N^2}{\mu} - \alpha - \gamma - \mu \right) \lambda^3 \\
& + \left(\frac{-\beta b N^2 \gamma}{\mu} - 3\beta b N^2 - \alpha \gamma + 3\alpha \mu + 2\mu^2 - \gamma \mu + \mu - 2\mu \gamma \right) \lambda^2 \\
& + (3\alpha \mu^2 + 2\alpha \gamma \mu + 2\mu^3 + 3\mu^2 \gamma + 2\beta b N^2 \gamma + \beta N^2 \mu) \lambda \\
& + (\beta b N^2 \gamma \mu - \beta b N^2 \mu^2 - \alpha \gamma \mu^2 + \alpha \mu^3 + \mu^4 - \mu^3 \gamma) = 0
\end{aligned}$$

nilai reproduksi dasar dari persamaan di atas diperoleh dari bagian konstantanya, sehingga diperoleh :

$$\beta b N^2 \gamma \mu - \beta b N^2 \mu^2 - \alpha \gamma \mu^2 + \alpha \mu^3 + \mu^4 - \mu^3 \gamma = 0$$

Bilangan reproduksi dasar diperoleh dengan menyamakan bagian positif dan negatifnya, maka diperoleh:

$$\mu^4 + \alpha \mu^3 + \beta b N^2 \gamma \mu = \mu^3 \gamma + \alpha \gamma \mu^2 + \beta b N^2 \mu^2$$

$$R_0 = \frac{\mu^3 \gamma + \mu^2 \alpha \gamma + \mu^2 \beta b N^2}{\mu^4 + \mu^3 \alpha + \mu \gamma \beta b N^2}$$

3. Simulasi Model

Salah satu tujuan dalam penelitian ini adalah melakukan simulasi model. Simulasi dilakukan karena pengamatan terhadap sistem sulit dilakukan secara langsung, selain itu dengan simulasi dapat dipelajari hal-hal yang bisa terjadi dalam dinamika populasi. Pemilihan parameter didasarkan pada studi yang dilakukan oleh berbagai sumber terpercaya. Beberapa nilai parameter seperti yang menyangkut populasi, didasarkan pada asumsi tentang situasi penyakit yang paling umum. Nilai-nilai parameter yang diambil sehingga diperoleh $R_0 > 1$ disajikan pada Tabel 4.1.

Tabel 4.3 Nilai parameter pada model SITR untuk penyakit tuberkulosis

Simbol	Parameter	Nilai	Nilai	Nilai
		Parameter 1	Parameter 2	Parameter 3

b	angka kelahiran (<i>birth rate</i>)	0.15	0.45	0.9
μ	angka kematian alami (<i>mortality rate</i>)	0.1	0.95	0.98
β	laju penyebaran	0.5	0.75	0.95
α	pemberian treatment	0,2	0.30	0.75
γ	angka kesembuhan (<i>revovery rate</i>)	0.3	1	0.85
N	angka total populasi	1	1	1

Dengan syarat awal yang akan digunakan dalam simulasi model ini adalah; Nilai $S_h(0)$, $I_h(0)$, $R_h(0)$, $S_v(0)$, dan $I_v(0)$ untuk model SIRS ditentukan seperti pada Tabel 4.2

Tabel 4.4 Syarat awal model SITR

Variabel	Nilai	Sumber
$S(0)$	$\frac{3361}{11506} = 0,2921$	Dinas Kesehatan Prov. Sul-Sel (2015)
$I(0)$	$\frac{3361}{11506} = 0,2921$	Dinas Kesehatan Prov. Sul-Sel (2015)
$T(0)$	$\frac{3361}{11506} = 0,2921$	Dinas Kesehatan Prov. Sul-Sel (2015)
$R(0)$	$\frac{1423}{11506} = 0,1236$	Dinas Kesehatan Prov. Sul-Sel (2015)

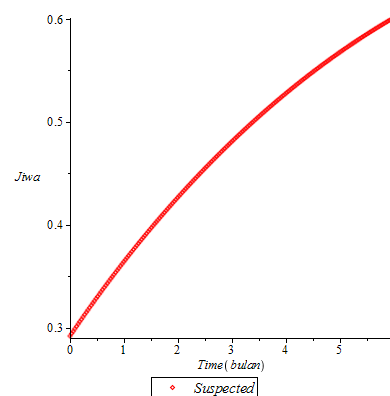
Data di atas didapatkan dari dinas kesehatan Prov. Sulawesi selatan tahun 2015, data susceptible, infected, dan treatment didapatkan dari jumlah pasien TB terdaftar yang diobati dalam triwulan tersebut. Karena orang yang rentan adalah orang yang sakit dan orang yang sakit juga diobati pada data tersebut. Maka data susceptible, infected, dan treatment adalah 3361 jiwa dan jumlah orang sembuh adalah 1423 jiwa.

a. Simulasi Komputer Model SITR

Baerdasarkan dari tabel parameter di peroleh lima grafik dari setiap nilai parameter

1. Simulasi Nilai Parameter 1

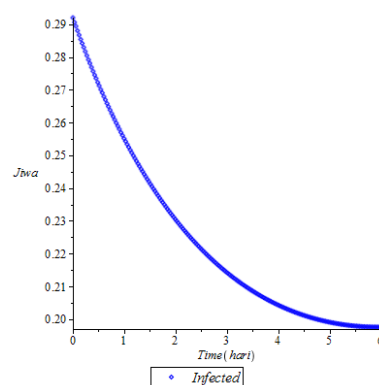
a. Proporsi Individu *Susceptible*



Gambar 4.2 Proporsi Individu *Susceptible*

Pada Gambar 4.2 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan pada setiap bulannya terus meningkat secara drastis.

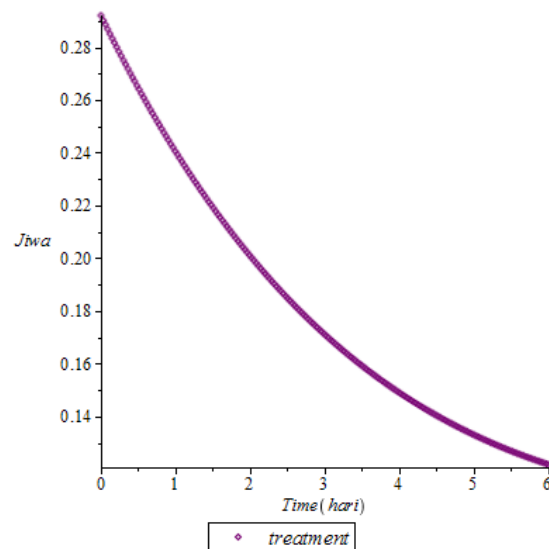
b. Proporsi Individu *Infected*



Gambar 4.3 Proporsi Individu *Infected*

Pada Gambar 4.2 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang trinfeksi pada setiap bulannya terus menurun secara drastic dikarenakan adanya faktor *treatment* (pengobatan).

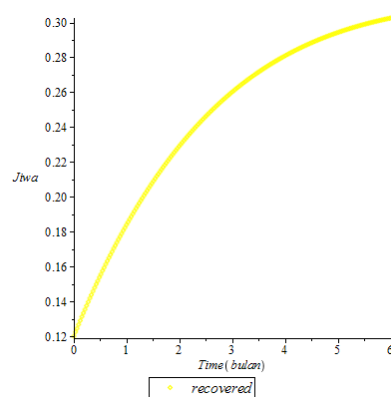
c. Proporsi Individu *Treatment*



Gambar 4.4 Proporsi Individu *Treatment*

Pada Gambar 4.2 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang *Treatment* pada setiap bulannya terus menurun secara drastis dikarenakan individu rentan semakin meningkat.

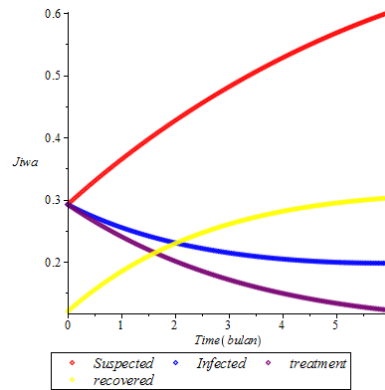
d. Proporsi individu *Recovered*



Gambar 4.5 Proporsi individu *Recovered*

Pada Gambar 4.2 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang sembuh pada setiap bulannya terus meningkat secara drastis dikarenakan adanya penambahan faktor *Treatment* (pengobatan).

e. Proporsi individu model Sitr

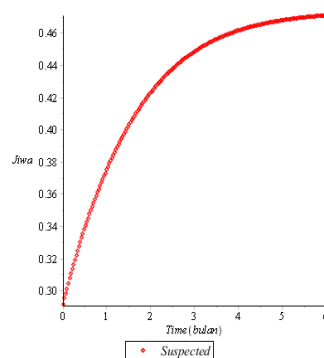


Gamabar 4.6 Proporsi individu model Sitr

Pada Gambar 4.6 Menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan pada setiap bulannya terus meningkat secara drastic, berbeda dengan populasi individu infected dan treatment terus menurun, tetapi populasi individu terus meningkat.

2. Simulasi Nilai Parameter 2

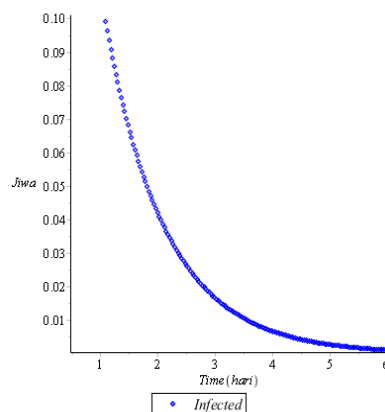
a. Proporsi Individu *Susceptible*



Gambar 4.7 Proporsi Individu *Susceptible*

Gambar 4.7 menunjukkan bahwa jumlah individu rentan setiap bulannya semakin meningkat seiring dengan berjalannya waktu, namun pada bulan ke-5 jumlah individu rentan stabil di titik 4 jiwa. Setiap individu yang sehat namun rentan penyakit masuk ke dalam subpopulasi *susceptible*, individu pada subpopulasi ini akan rentan terhadap penyakit dan memiliki peluang yang sangat besar untuk terdeteksi penyakit.

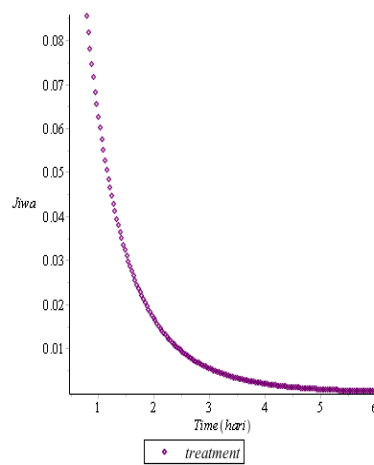
b. Proporsi Individu *Infected*



Gambar 4.8 Proporsi Individu *Infected*

Pada Gambar 4.8 menunjukkan bahwa jumlah individu yang terinfeksi pada bulan pertama menurun secara drastis, dikarenakan adanya jumlah pengurangan individu *infected* ke kelompok subpopulasi *recovered*, hal ini terjadi karena adanya individu yang sembuh dari penyakit. Maka setiap individu yang terinfeksi penyakit akan masuk ke dalam subpopulasi *infected*. Gambar 4.8 juga menunjukkan bahwa penyakit akan menghilang dari populasi diatas 10 bulan.

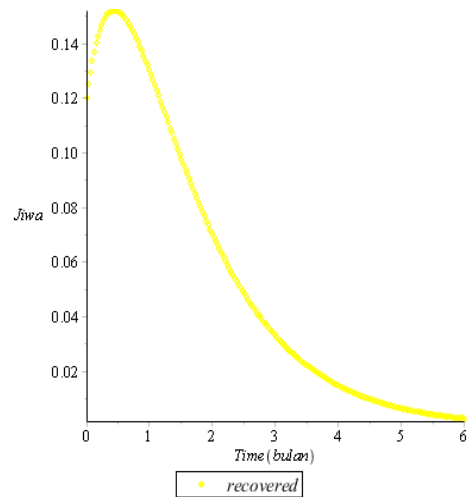
c. Proporsi Individu *Treatment*



Gambar 4.9 Proporsi Individu *Treatment*

Gambar 4.9 menunjukkan bahwa proporsi individu *Treatment* mengalami penurunan yang cukup drastis dan mulai stabil pada bulan ke-3. Hal tersebut disebabkan karena adanya individu *Treatment* yang sembuh dari penyakit sehingga memasuki kelompok *Recovered*.

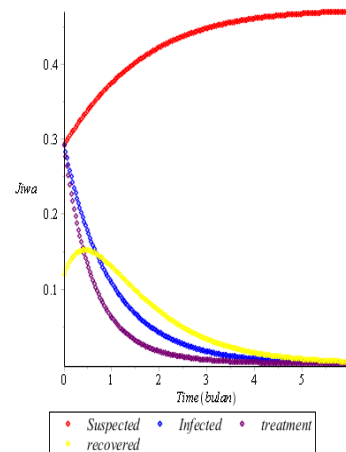
d. Proporsi individu *Recovered*



Gambar 5.0 Proporsi individu *Recovered*

Pada Gambar 5.0 menunjukkan bahwa jumlah individu yang sembuh meningkat, namun pada bulan ke-1 jumlah individu *recovered* menurun secara drastis dan stabil di bulan ke-6 dikarenakan individu *recovered* mendapatkan perawatan

e. Proporsi individu model SITR

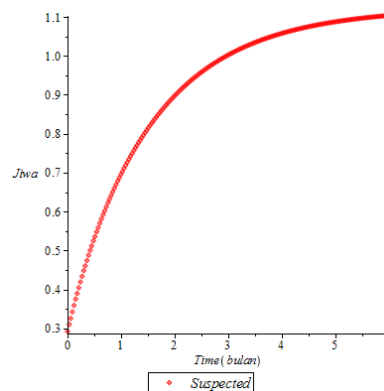


Gambar 5.1 Proporsi individu model SITR

Gambar 5.1 menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan setiap bulannya semakin meningkat seiring dengan berjalannya waktu. Berbeda dengan individu yang terinfeksi, pengobatan dan sembuh hanya menunjukkan interval yang paling rendah dan tidak mengalami peningkatan di setiap bulannya.

3. Simulasi Nilai Parameter 3

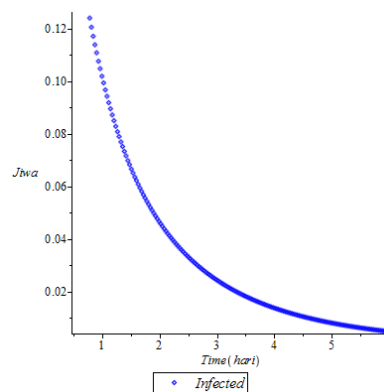
a. Proporsi Individu *Susceptible*



Gambar 5.2 Proporsi Individu *Susceptible*

Gambar 5.2 menunjukkan bahwa jumlah individu rentan setiap bulannya semakin meningkat seiring dengan berjalannya waktu, namun pada bulan ke-5 jumlah individu rentan stabil di titik 1,1 jiwa. Setiap individu yang sehat namun rentan penyakit masuk ke dalam subpopulasi *susceptible*, individu pada subpopulasi ini akan rentan terhadap penyakit dan memiliki peluang yang sangat besar untuk terdeteksi penyakit.

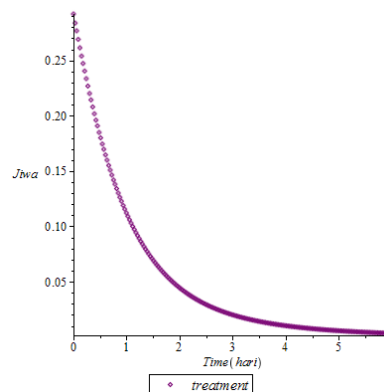
b. Proporsi Individu *Infected*



Gambar 5.3 Proporsi Individu *Infected*

Pada Gambar 5.3 menunjukkan bahwa jumlah individu yang terinfeksi pada bulan pertama menurun secara drastis, dikarenakan adanya jumlah pengurangan individu *infected* ke kelompok subpopulasi *recovered*, hal ini terjadi karena adanya individu yang sembuh dari penyakit. Maka setiap individu yang terinfeksi penyakit akan masuk ke dalam subpopulasi *infected*.

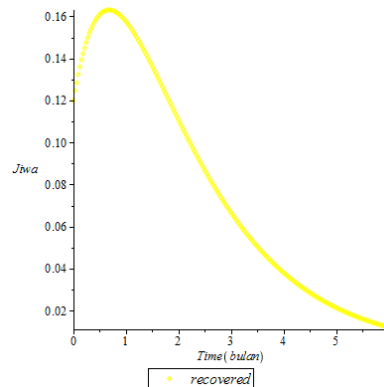
c. Proporsi Individu *Treatment*



Gambar 5.4 Proporsi Individu *Treatment*

Gambar 5.4 menunjukkan bahwa proporsi individu *Treatment* mengalami penurunan yang cukup drastis dan mulai stabil pada bulan ke-6. Hal tersebut disebabkan karena adanya individu *Treatment* yang sembuh dari penyakit sehingga memasuki kelompok *Recovered*.

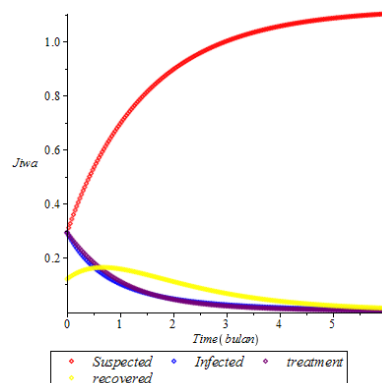
d. Proporsi individu *Recovered*



Gambar 5.5 Proporsi individu *Recovered*

Pada Gambar 5.0 menunjukkan bahwa jumlah individu yang sembuh meningkat, namun pada bulan ke-1 jumlah individu *recovered* menurun secara drastis dan stabil di bulan ke-6 dikarenakan individu *recovered* mendapatkan perawatan.

e. Proporsi individu model Sitr



Gambar 5.6 Proporsi individu model Sitr

Gambar 5.1 menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan setiap bulannya semakin meningkat. Berbeda dengan individu yang terinfeksi, pengobatan dan sembuh hanya menunjukkan interval yang paling rendah dan tidak mengalami peningkatan di setiap bulannya .

b. Kadar Reproduksi Awal

1. Kadar reproduksi awal pada nilai parameter 1

Nilai kadar reproduksi awal R_0 diperoleh dengan menggunakan nilai awal dan nilai parameter yang telah ditentukan dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\mu^3\gamma + \mu^2\alpha\gamma + \mu^2\beta bN^2}{\mu^4 + \mu^3\alpha + \mu\gamma\beta bN^2} \\ &= \frac{(0.1)^3(0.3) + (0.1)^2(0.2)(0.3) + (0.1)^2(0.5)(0.15)(1)^2}{(0.1)^4 + (0.1)^3(0.2) + (0.1)(0.3)(0.5)(0.15)(1)^2} \\ &= 0.88235294 \end{aligned}$$

Karena nilai $R_0 < 1$ maka hal ini dapat dikatakan bahwa penyakit tersebut tidak dapat menular atau tidak menjadi wabah.

2. Kadar reproduksi awal pada nilai parameter 2

Nilai kadar reproduksi awal R_0 diperoleh dengan menggunakan nilai awal dan nilai parameter yang telah ditentukan dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\mu^3\gamma + \mu^2\alpha\gamma + \mu^2\beta bN^2}{\mu^4 + \mu^3\alpha + \mu\gamma\beta bN^2} = \frac{(1)^3(2) + (1)^2(0,025)(2) + (1)^2(0,1)(4)(1)^2}{(1)^4 + (1)^3(0,025) + (1)(2)(0,1)(4)(1)^2} \\ &= 1,04336331 \end{aligned}$$

Karena nilai $R_0 > 1$ maka hal ini menjadi status epidemik. Hal ini harus menjadi perhatian serius bagi pemerintah agar segera mengontrol dan mencegah semakin merebaknya wabah penyakit tuberkulosis di kawasan tersebut.

3. Kadar reproduksi awal pada nilai parameter 3

Nilai kadar reproduksi awal R_0 diperoleh dengan menggunakan nilai awal dan nilai parameter yang telah ditentukan dan diperoleh hasil sebagai berikut:

$$\begin{aligned} R_0 &= \frac{\mu^3\gamma + \mu^2\alpha\gamma + \mu^2\beta bN^2}{\mu^4 + \mu^3\alpha + \mu\gamma\beta bN^2} \\ &= \frac{(0.98)^3(0.85) + (0.98)^2(0,75)(0.85) + (0.98)^2(0.95)(0.9)(1)^2}{(0.98)^4 + (0.98)^3(0.75) + (0.98)(0.85)(0.95)(0.9)(1)^2} \\ &= 0,95959287 \end{aligned}$$

Karena nilai $R_0 < 1$ maka hal ini dapat dikatakan bahwa penyakit tersebut tidak dapat menular atau tidak menjadi wabah.

B. Pembahasan

Penelitian tentang pemodelan matematika terhadap penyakit DBD telah dilakukan sebelumnya K. Queena Fredlina, dkk, (2012) dalam jurnalnya yang berjudul “Model SIR (*Susceptible-Infectious-Recovered*) untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis”.

Penelitian tentang “Analisis dan Simulasi Model Sitr pada Penyebaran Penyakit Tuberkulosis di Kota Makassar” ini dikembangkan dari penelitian K. Queena Fredlina, dkk, (2012) dengan menggunakan model Sitr.

Dari formulasi model terbentuk sistem persamaan dan telah dilakukan analisis model sebelum melakukan simulasi model. Telah ditemukan dua titik tetap model, sehingga hasil analisis model stabil asimtotik. Perbedaan penelitian yang dilakukan oleh K. Queena Fredlina, dkk, (2012) terletak pada model yang digunakan dimana K. Queena Fredlina, dkk, (2012) menggunakan model matematika SIR sedangkan pada penelitian ini model matematika SIR tersebut dikembangkan dengan menambahkan variabel treatment sehingga menjadi model Sitr.

BAB V

PENUTUP

A. KESIMPULAN

Dari pembahasan yang telah dilakukan, dapat diperoleh kesimpulan sebagai berikut:

1. Model matematika Sitr pada penyebaran penyakit tuberkulosis dapat diekspresikan sebagai berikut:

$$\frac{dS}{dt} = bN - \beta \frac{I}{N} S - \mu S$$

$$\frac{dI}{dt} = \beta \frac{I}{N} S - \alpha I - \mu I$$

$$\frac{dT}{dt} = \alpha I - \gamma T - \mu T$$

$$\frac{dR}{dt} = \gamma T - \mu R$$

2. Analisis model matematika Sitr untuk penyebaran penyakit tuberkulosis menghasilkan dua titik ekuilibrium yaitu titik ekuilibrium bebas penyakit dan titik ekuilibrium endemik yang stabil asimtotik.
3. Hasil simulasi diperoleh plot grafik untuk nilai parameter pertama menunjukkan bahwa jumlah individu yang rentan pada setiap bulannya terus meningkat secara drastis, berbeda dengan populasi individu infected dan treatment terus menurun, tetapi populasi individu terus meningkat.

Untuk nilai parameter kedua menunjukkan bahwa jumlah individu *Susceptible* setiap bulannya selalu meningkat, jumlah individu *Infected* mengalami penurunan, dan jumlah individu *Treatment* mengalami penurunan, dan jumlah individu *Recovered* mengalami penurunan.,

Dan parameter ke tiga menunjukkan bahwa proporsi individu *Treatment* mengalami penurunan yang cukup drastis dan mulai stabil pada bulan ke-6. Hal tersebut disebabkan karena adanya individu *Treatment* yang sembuh dari penyakit sehingga memasuki kelompok *Recovered*. Diperoleh tiga bilangan reproduksi dasar

$R_0 = 0,88235298$, $R_0 = 1,04336331$ dan $R_0 = 0,95959287$, pada nilai R_0 pertama ini berarti seseorang yang terinfeksi tidak dapat menyebabkan orang lain terkena penyakit yang sama, dengan kata lain tidak terjadi wabah pada populasi tersebut. Pada nilai R_0 kedua ini berarti seseorang yang terinfeksi menyebabkan orang lain terkena penyakit yang sama, dengan kata lain terjadi wabah pada populasi tersebut. Pada nilai R_0 pertama ini berarti seseorang yang terinfeksi tidak dapat menyebabkan orang lain terkena penyakit yang sama, dengan kata lain tidak terjadi wabah pada populasi tersebut

B. SARAN

Pada penelitian ini telah dilakukan analisis dan simulasi model SITR pada penyebaran penyakit tuberkulosis di Kota Makassar. Model ini masih dapat dikembangkan lagi mengingat masih terdapat penyebab lain yang dapat dipertimbangkan seperti pemberian vaksin tuberkulosis pada individu yang terinfeksi. Analisis alternatif juga dapat menggunakan metode analisis Homotopi multistage dan solusi numerik. Model ini juga kiranya dapat digunakan untuk penyakit lainnya yang memenuhi syarat model SITR.

DAFTAR PUSTAKA

Beneson A. S. 1990. *Control Of Communicable Diseases In Man*. Washington DC:

American Public Health Association.

Campbell, S. L., & Haberman, R. 2008. *Introduction to Differential Equations with Dynamical System*. New Jersey: Princeton University Press.

Danang, M. 2010. *Aljabar Linear*. Rekayasa Sains: Bandung.

Depkes RI. (2007). *Pedoman Nasional Penanggulangan Tuberkulosis 2007*. Jakarta: Departemen Kesehatan RI.

Effendy. (2013). *Skripsi: Analisis Stabilitas Pada Penyebaran Penyakit DBD di Kabupaten Jember Dengan Metode SIR Stokastik*. Universitas Jember.

Ermilatni, E. 2016. *Skripsi: Model Matematika Seir Untuk Kontrol Campak Dengan Pengaruh Vaksinasi di Kabupaten Bulukumba*. Universitas Negeri Makassar: Makassar.

Fredlina, K. Q dkk. 2012. *Jurnal: Model SIR (Susceptible-Infectious-Recovered) untuk Penyebaran Penyakit Tuberkulosis*. e-Jurnal Matematika Vol.1 No.1: 52-58.

Gubler, D. J and G. C Clark. 1995. *Dengue/Dengue Hemorrhagic Fever: The Emergence Of A Global Health Problem*. *Emerging Infectious Diseases* **1**: 55 -57.

Maesaroh, U. 2013. *Skripsi: Model Matematika Untuk Kontrol Campak Menggunakan Vaksinasi*. Universitas Islam Negeri Sunan Kalijaga: Yogyakarta.

Mulisi, S. 2011. *Pengaruh Vaksinasi terhadap Dinamika Populasi pada Model SIR (Suspected-Infected-Recovered)*. Tugas Akhir S1 Departemen Matematika Institut Pertanian Bogor.

Meiss, J. D. Differential Dynamical Systems, Society for Industrial and Applied Mathematics, USA. 2007.

Ol'sder, G. J. 1994. *Mathematical System Theory*. Delft University of Technology: Belanda.

Perko, L. 2001. *Differential Equations and Dynamical System 3rd*. New York: Springer

Rafflesia, U. 2014. J. Model Penyebaran penyakit Tuberkulosis (TBC). Jurnal Gradien Vol.10 No.2: 983-986.

Richard, B., Gabriel, C. 2007. *Persamaan Diferensial*. Jakarta: Erlangga

Roni, T. P. 2011. Jurnal: *Kestabilan Lokal Bebas Penyakit Model Epidemi SEIR dengan kumpulan Infeksi pada Periode Laten*. Politeknik Negeri Padang: Padang.

Side, S. 2013. *Sistem Dinamik*. Badan Penerbit UNM: Makassar.

WHO. (2014). *Global Tuberculosis Report 2014*. Geneva: World Health Organization.

Wulandari, U. N. (2013). *Analisis Model Epidemik MSEIR pada Penyebaran Penyakit Difteri*. Skripsi. Jember: Universitas Jember.

RIWAYAT HIDUP



Nur Fajri Setiawan, lahir di Soreang pada tanggal 18 Juli 1995.

Penulis merupakan anak pertama dari 0 bersaudara dari pasangan Sembo Bahri, S.Pd dan Fatmawati, S.Pd.

Penulis memulai jenjang pendidikan formal di TK Garudayya pada tahun 2000. Pendidikan sekolah dasar ditempuh penulis di SD Negeri No.1 Centre Pattallassang pada tahun 2001 hingga tahun 2007. Pendidikan sekolah menengah pertama ditempuh penulis di SMP Negeri 1 Takalar pada tahun 2007 dan selesai pada tahun 2010. Kemudian pendidikan penulis dilanjutkan di SMA Negeri 1 Takalar pada tahun 2010 dan selesai pada tahun 2013. Selama di SMA, penulis masuk di organisasi yang bergerak di bidang Kimia dan Matematika. Pada tahun 2013, penulis diterima sebagai mahasiswa Jurusan Matematika, Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam (FMIPA) Universitas Negeri Makassar.